

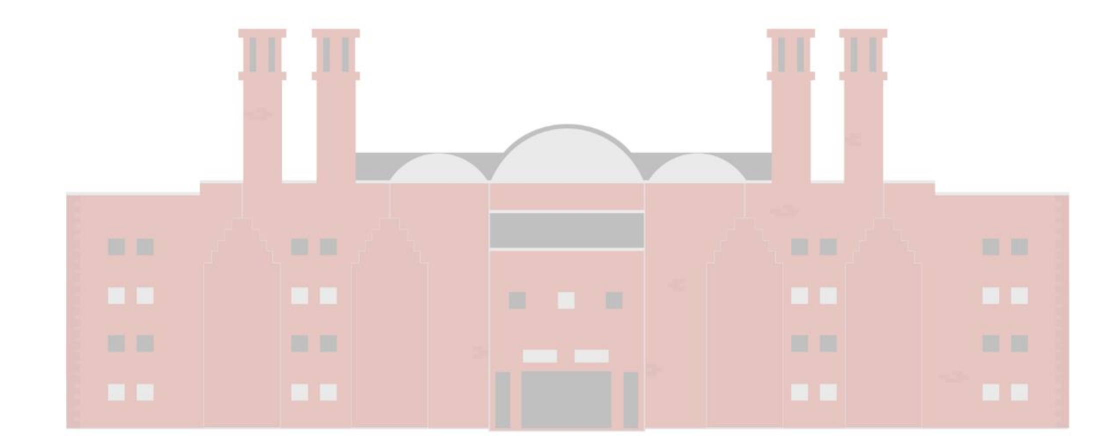
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل الرياضي ٣







الدكتور: **معاذ عبد المجيد**

التاريخ: **٢٠١٤/٩/٢٤**





السرعة، الدقّة والتميُّز







/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

تفرق ودوران حقل شعاعي :divergence and rotation:.

ليكن $(\vec{F}) = (F1 , F2 , F3)$ حقلاً شعاعياً للموضع في منطقة فراغية D بحيث

$$\vec{F} \in cl^1 (D)$$

نسمي الجداء العددي (الداخلي) للمؤثر $\vec{\nabla}$ بالتابع الشعاعي $\vec{F}$ انتشار تفرق (تباعد) الحقل $\vec{F}$ في D ويكون الناتج تابع عددي

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla}\,.\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ونسمي الجداء الخارجي (الشعاعي) للمؤثر $\vec{\nabla}$ بالتابع الشعاعي $\vec{F}$ دوران (اعصار) الحقل $\vec{F}$ في D والناتج تابع شعاعي للموضع وتوجيهه معين ما لم تنعدم طويلته

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

ملاحظة

• إن تفرق ودوران الشعاع $\vec{F}$ موجودان ومستمران في D لأن

$$(\vec{F}) \in cl_1 (D)$$

• قواعد الاشتقاق

ليكن $U \in cl^1_{(D)}$ و V توابع للموضع

$$\vec{\nabla}.(\propto \vec{u}) = \propto \vec{\nabla}.\vec{u} \;,\; \vec{\nabla} \wedge (\propto \vec{u}) = \propto (\vec{\nabla} \wedge \vec{u})$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla}.\vec{u} + \vec{\nabla}.\vec{v} \;,\; \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} + \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}.(f\,\vec{v}) = (\vec{\nabla} f).\vec{v} + f(\vec{\nabla}.\vec{v})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{v} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) - \vec{u}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})\ \vec{\nabla}.$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{u}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \vec{v}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{u})\ \vec{\nabla} \wedge$$

$$(\vec{u}.\vec{v}) = (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) + \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})\ \vec{\nabla}$$

مثال: احسب تفرق ودوران شعاع الموضع $\vec{r}$

الحل: إن مركبات $\vec{r}$ حدوديات اي $\vec{r} \in cl_1(D)$ فالتفرق والدوران موجودان

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad \vec{\nabla}.\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \vec{0}$$

ليكن $\vec{r} = r\,\hat{r}$ أحسب $\vec{\nabla}.\frac{\hat{r}}{r}$ في منطقة يطلب تعيينها

لما كان $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ فإن $\frac{\hat{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ وهو تابع شعاعي للموضع مستمر في أي منطقة لاتحوي المبدأ

اضطررنا لهذه الكتابة لان إعطاء مركبات $\hat{r}$ صعبه

$$\hat{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{\nabla}.\frac{\hat{r}}{r}=\vec{\nabla}.(\frac{1}{r^2}\ \vec{r})=(\vec{\nabla}\frac{1}{r^2})\vec{r}+\frac{1}{r^2}(\vec{\nabla}.\vec{r})=-2\frac{\hat{r}}{r^3}\ .\hat{r}.r+\frac{3}{r^2}=\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{\nabla}\ (\frac{1}{r^2})=\hat{r}\ \frac{d}{dr}(\frac{1}{r^2})=\hat{r}\ (\frac{-2}{r^3})=-2\hat{r}\ /r^3$$

احسب تفرق ودوران التابع الشعاعي للموضع $\vec{F}=(\hat{\imath}.\vec{r})\ \vec{r}$

الحل

$$\vec{F}=(\hat{\imath}.\vec{r})\ \vec{r}=x(\ x\ \hat{\imath}+y\ \hat{\jmath}+z\ \hat{k}\ )=x^2\ \hat{\imath}+xy\ \hat{\jmath}+xz\ \hat{k}$$

وهو تابع مستمر مع مشتقاته الأولى فالتفرق والدوران موجودان

$$\vec{\nabla}.\vec{f}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial(xy)}{\partial y^2}+\frac{\partial(xz)}{\partial z^2}=4x$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & xy & xz\end{vmatrix}=-z\hat{\jmath}+y\hat{k}$$

المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية:

إن المشتقات الشعاعية من المرتبة الاولى $\vec{\nabla}f$(التدرج) و $\vec{\nabla}.\vec{f}$(التفرق) و $\vec{\nabla}\wedge\vec{f}$ (الدوارن) هي توابع ،نطبق عليها المؤثر $\vec{\nabla}$:

١) تفرق التدرج :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}f)=(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})f=\nabla^2 f=lap\ f$$

حيث أن $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\equiv\nabla^2\equiv$lap مؤثر اشتقاقي غير موًجه يسمى مؤثر لابلاس و هو :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

تسمى المعادلة $\nabla^2 f = 0$ معادلة لابلاس وكل تابع يحققها يسمى تابع توافقي

لما كان ∇^2 مؤثر اشتقاقي غير موجه ، فانه يمكن أن يؤثر على تابع شعاعي $\vec{f}$

$$\nabla^2 \vec{f} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = \text{lap}\, \vec{f}$$

ملاحظة

$$\nabla^2 \vec{f} = (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{f} \neq \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\,\vec{f})$$

لأن $\vec{\nabla}\vec{f}$ غير معرف (تدرج تابع شعاعي)

مثال: أثبت أن التابع العددي $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$ توافقي في أي منطقه لا تشمل المبدأ

الحل:

$$\nabla^2 f = -\left[\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{z^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{y^2+x^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right]=0$$

أذن f توافقي في تلك المنطقة



- أذا كان $f = f(r)$ تابع فقط للإحداثي الكروي فإن

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{df}{dr}\right]$$

الحل بهذه الطريقة أسهل

٢) دوران التدرج $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f)=\vec{0}$

٣) تفرق الدوران $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{f})=0$

٤) دوران الدوران و تدرج التفرق :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{f})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{f})-\nabla^2\vec{f}$$

تعريف: نقول عن الحقل الشعاعي $\vec{f}$ حقلاً محافظاً (كمونياً ،غير دورانياً ،غير اعصارياً) في منطقه D أذا كان تدرجاً لحقل عددي f في المنطقه D أي اذا كان : $\vec{\nabla}f=\vec{F}$

نسمي f الكمون العددي للحقل $\vec{F}$

مبرهنة : يكون $\vec{F}$ كمونياً إذاً و فقط إذا كان :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{0}$$

البرهان: $\vec{F}$ كموني عندئذ يوجد تابع عددي f بحيث يكون $\vec{F}=\vec{\nabla}f$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f)=\vec{0}$$

يمكن البرهان على العكس بسهولة $\vec{\nabla}.\vec{f}=0$ $\nabla^2 f=0\Rightarrow$

ملاحظة

- ينعدم تفرق الحقل الكموني اذ كان كمونه العددي تابعا توافقيا
- اذا كان C ثابتا اختياريا وكان f كموناً عدديا للحقل $\vec{F}$ فان $f+C$ ايضا كمون ل $\vec{F}$:

البرهان: $\vec{\nabla}(f+c)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}c=\vec{\nabla}f=\vec{F}$

أي أن $(f+C)$ كمون عددي للحقل الكموني $\vec{F}$

مثال: اثبت ان الحقل $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ كموني في R^3 ثم احسب كمونه العددي

الحل:

ان $\vec{F} \in cl^1(R^3) \implies$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \exists f: \vec{F} = \vec{\nabla} f$$

$$x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \implies \frac{\partial}{\partial x} = x^2 \Rightarrow f = x^3/3 + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = y^2 = \partial\varphi/\partial y \Rightarrow \varphi(y, z) = {}^{y^3}/_{3} + g(z) \Rightarrow f = (x^3 + y^3)/3 + g(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = z^2 = \partial g/\partial z \Rightarrow g(z) = z^3/3 + c \implies f = \frac{(x^3 + y^3 + z^3)}{3} + c$$



الاهتمام بالتفاصيل الصغيرة هو السبيل الوحيد لحل أصعب القضايا

شارلوك هولمز